

Notions de logiques **مبادئ في المنطق**

القدرات المنتظرة

تعرف عبارة تحديد قيمة حقيقة عبارة. تعرف نفي عبارة. تعرف عطف وفصل واستلزام
وتكافؤ عبرتين. توظيف العمليات على المكلمات والعبارات. التعرف على الاستدلالات
الرياضية (الاستدلال بالخلف. الاستدلال بالعكس الاستدلال بفصل الحالات. الاستدلال
بالتكافؤ الاستدلال بالترجع. توظيف الاستدلالات الرياضية)

ا. تعاريف ومصطلحات

1 - العبارة - الدالة العبارية

ا - تعريف

العبارة في المنطق هي كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا أو خاطئا

مثال : $3=2$ عبارة خاطئة

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ عبارة خاطئة

$2 \neq 5$ عبارة صحيحة

ب- تعريف

**الدالة العبارية في المنطق هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى
مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه
المجموعة.**

نرمز للدالة العبارية بـ $P(x)$.



د - ملاحظة

إذا كان لدينا متغيرين x و y نكتب $P(x; y)$ ونكتب
 $P(x; y; z)$ أو $P(x; y; z; k)$ إذا كان أكثر من متغيرين

2 - الكميات les quantificateurs

لتكن $P(x)$ دالة عبارية و E مجموعة فارغة

- العبارة $(\exists x \in E) P(x)$: التي تكون صحيحة إذا فقط إذا كان يوجد على الأقل
عنصر واحد من E يحقق $P(x)$ ونقرا يوجد على الأقل عنصر x من E يحقق $P(x)$
ويسمى هذا الرمز **المكمم الوجودي**

- العبارة $(\forall x \in E) P(x)$ التي تكون صحيحة إذا فقط إذا كان جميع عناصر
المجموعة E تحقق الخاصية $P(x)$ ونقرا مهما يكن x من E ويسمى هذا **المكمم الكوني**

مثال 1:

باستعمال الكميات اكتب العبارات التالية

1. لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي m بحيث $n = 2m$

2. لكل عددين حقيقيين x و y يوجد عدد صحيح طبيعي n بحيث $x - y = m$

مثال 2

اكتب العبارات التالية بدون كميات

$$-1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): x^2 + y^2 = 1$$

$$-2 \quad (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) y < x$$

$$-3 \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\exists m \in \mathbb{Z}) nx < m$$



ملاحظة

- الكم الكوني (مهما يكن). الرمز \forall
- الكم الوجودي (يوجد عنصر من). الرمز \exists
- الكم الوجودي للوحدانية! $\exists!$

➤ إذا كانت الكمات من نفس الطبيعة فان ترتيبها ليقق له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة الكممة

➤ أما إذا كانت من طبيعة مختلفة فترتيبها له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة الكممة

II. العمليات المنطقية

1. النفي المنطقي *négation*

أ- تعريف

نفي العبارة P هي العبارة التي تكون خاطئة إذا كانت P صحيحة وصحيحة إذا كانت P خاطئة ونرمز لها بـ \bar{P} أو $\neg P$

ويعبر عن النفي بجدول الحقيقة التالي

P	\bar{P}
1	0
0	1

مع العدد 0 يعني عبارة خاطئة و 1 يعني عبارة صحيحة ($V=1$) et ($F=0$)

(نفي العبارة الصحيحة هي الخاطئة والعكس بالعكس)

ب- نفي عبارة كممة

➤ نفي العبارة $(\exists x \in E) P(x)$ هي $(\forall x \in E) \bar{P}(x)$

➤ نفي العبارة $(\forall x \in E) P(x)$ هي $(\exists x \in E) \bar{P}(x)$

▪ (نفي الكم الكوني هو الوجودي والوجودي هو الكوني)



$$P : \forall x \in \mathbb{R}^+; \sqrt{x} < x$$

لتكن العبارة التالية

ج* - تطبيق 1

1- حدد نفي العبارة P

2- بين أن \bar{P} عبارة صحيحة

3- هل P عبارة صحيحة

2. الفصل المنطقي disjonction

أ - تعريف

فصل عبارتين P و Q هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين P و Q صحيحة و نمرز له ب P او Q

ونعبر عنه بجدول الحقيقة

P	Q	Q أو P
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ب- ملاحظة

الفصل تبادلي (P أو Q) و (Q أو P) لهما نفس المعنى

* تطبيق 2 لتكن العبارة الآتية $P : \forall x \in \mathbb{R}^* (x^2 \geq x \vee x^2 + 1 > 0)$

1 - بين أن العبارة P صحيحة

2- حدد نفي العبارة P

3* تطبيق حدد حقيقة العبارات التالية

1 - $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ أو $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 \neq 0$

2 - $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ أو $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 = 0$



3. العطف المنطقي conjunction

أ تعريف
عطف عبارتين P و Q هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت P و Q صحيحتان
معا ونرمز له بـ P و Q

ونعبر عنه بجدول الحقيقة

P	Q	P و Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ملاحظة العطف تبادلي (P و Q) او (Q و P) لهما نفس المعنى

4. الاستلزام المنطقي implication

أ- تعريف
انطلاقا من العبارتين P و Q نحصل على العبارة نفي P أو Q ($\bar{P}Q$)
التي تكون خاطئة إذا فقط إذا كانت P صحيحة و Q خاطئة
العبارة ($\bar{P}Q$) تسمى **استلزام** P و Q و نكتب $P \Rightarrow Q$
ونقرا (**استلزام** Q) أو (**إذا كانت** P **فان** Q) أو (**من** P **نستنتج** Q)

ونعبر عنه بجدول الحقيقة

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ملاحظة العبارتان ($P \Rightarrow Q$) و ($Q \Rightarrow P$) لتحملان نفس المعنى



تطبيق 4

بين انه لكل x من \mathbb{R} ولكل y من \mathbb{R} فان $(x = 1y \Rightarrow 1 + xy = x + y)$

تطبيق 5

بين أن $\forall x \in [0;1[\forall y \in \mathbb{R} : y \neq 1 \Rightarrow 1 + xy \neq x + y$

حدد حقيقة العبارات التالية

تطبيق 6

$$(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0 \Rightarrow 2 < \sqrt{3})$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{5} \Rightarrow 7 \in \mathbb{N}$$

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3})$$

5. التكافؤ المنطقي equivalence

1- تعريف

تكافؤ العبارتين P و Q هو العبارة $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ التي تكون صحيحة إذا كانت ل P و Q نفس قيم الحقيقة ونرمز للتكافؤ ب $P \Leftrightarrow Q$ ونقرا (لدينا P إذا فقط إذا كانت) أو (P تكافؤ Q)

ونعبر عنه بجدول الحقيقة التالي

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



كل عبارة مكونة من عدة عبارات A و b و c ... مرتبطة بينها بالعمليات المنطقية وتكون صحيحة مهما كانت A و b و c ... العبارات تسمى قانونا منطقيا

1- تعريف

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \quad \text{و} \quad \neg(\neg A) = A$$

2 قوانين موركان

$$\neg(\neg A) = A \quad \text{أو} \quad \neg(\neg B) = B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \quad \text{و} \quad \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$$

3. قانون التكافؤات المتتالية

$$(A \Rightarrow C) \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

4. قانون فصل الحالات

$$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

5. قانون بالخلف

6 *مبدأ التراجع

البرهان بالتراجع يعتمد على ثلاث عناصر أساسية

التحقق: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد الأول

الافتراض: نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد n

البرهان: نبرهن أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد $n+1$

